

Άρα σημείο τομής $Q(0, 1/2, 1/2)$

Από την εξίσωση: $\vec{OP} + \vec{OP'} = 2\vec{OQ} \Rightarrow$

$$\vec{OP'} = 2\vec{OQ} - \vec{OP} = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

Θέμα 4 :

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0, 1)$ και $B(0, 1, 0)$ και το επίπεδο (π) με εξίσωση: $x - y + z - 1 = 0$

α. Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) που διέρχεται από τα A και B τέμνει το επίπεδο (π) και να βρεθεί το σημείο τομής.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας (Σ) που έχει ως διάμετρο το τμήμα AB .

γ. Να δείξετε ότι η (Σ) τέμνει το επίπεδο (π) σε κύκλο.

δ. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

Θέματα [31/01/2019]: 30/05/19

Θέμα 2 :

Θεωρούνται τα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ και $D(1, 2, 3)$

α. Να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπίπεδου με πλευρές παράλληλες προς τα $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ και $\vec{AD}$

β. $\frac{N}{\beta\rho}$ η σφαίρα που διέρχεται από τα σημεία A, B, C, D. $\prod$ όλες τέτοιες σφαίρες υπάρχουν j

Λύση:

α. Υποδορίζουμε:

$$\vec{v}_1 = \vec{AB} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{AD} = (0, 2, 3)$$

$$\text{Άρα } Vol(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

β. Η γενική εξίσωση σφαίρας είναι:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad (*)$$

Επειδή τα A, B, C, D ανήκουν στη σφαίρα $\Rightarrow$ τα σημεία αυτά πληρούν την (*).

$$\begin{aligned} A \rightarrow & \begin{cases} 1 + \alpha + \delta = 0 \\ 1 + \beta + \delta = 0 \\ 1 + \gamma + \delta = 0 \\ 14 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - \delta \\ \beta = -1 - \delta \\ \gamma = -1 - \delta \\ 14 + 6(-1 - \delta) + \delta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -13/5 \\ \beta = -13/5 \\ \gamma = -13/5 \\ \delta = 8/5 \end{cases}$$

Επομένως η εξίσωση της σφαίρας που ζητάμε είναι:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{13}{5}x - \frac{13}{5}y - \frac{13}{5}z + \frac{8}{5} = 0$$

Επειδή βρήκαμε μόνο μια λύση, υπάρχει μόνο μια τέτοια σφαίρα.

Θέμα 3 :

Θεωρούμε την σφαίρα (S) και το επίπεδο (π) με εξισώσεις :

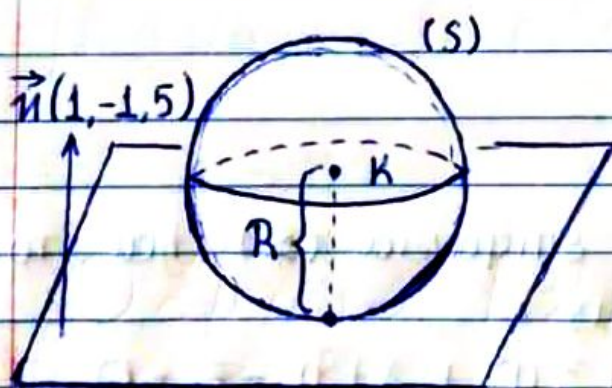
$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y = -29/3$$

$$(\pi) : x - y + 5z = 1$$

α. Νδο το επίπεδο (π) εφάπτεται στη σφαίρα

β. Νβρ το σημείο επαφής.

Λύση :



α. Για να εφάπτεται το επίπεδο στη σφαίρα θα πρέπει :

$$d(K, \pi) = R, \text{ όπου } K \equiv \text{κέντρο σφαίρας και } R = \text{ακτίνα σφαίρας.}$$

$$0 = x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - \frac{29}{3} \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } K(3, -1, 0) \text{ και } R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Από την άλλη: $d(K, \pi) = \frac{|3+1-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow d(K, \pi) = R = \frac{1}{\sqrt{3}}$

β. Το σημείο επαφής είναι τομή της ευθείας που διέρχεται από το K και τέμνει κάθετα το επίπεδο (π) .

Η ευθεία είναι:

$$\begin{aligned} E(t) &= (3, -1, 0) + t \cdot (1, -1, 5) \\ &= (3+t, -1-t, 5t) \end{aligned}$$

Η $E(t)$ τέμνει το (π) για:

$$(3+t) - (-1-t) + 5 \cdot (5t) = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$Q\left(\frac{26}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{5}{9}\right)$$

Θέμα 4 :

Θεωρούμε την επιφάνεια (Σ) και το επίπεδο (π) με εξισώσεις:

$$(\Sigma): 3x^2 + 2xy + 3y^2 + \underline{x+y} - z = 0$$

$$(\pi): \underline{z - x - y} = 4$$

Να περιγραφεί γεωμετρικά η τομή.

Λύση:

Η τομή είναι καρδιά στο επίπεδο (π) με εξίσωση: $3x^2 - 2x \cdot y + 3y^2 - 4 = 0$

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$Q(X, Y) = 3X^2 - 2XY + 3Y^2$$

Ο πίνακας της Q είναι: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ιδιότητες:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = 4 > 0$$

Άρα είναι έλλειψη.

Θέμα 5:

Νβρ η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το $(0,0,0)$ και οδηγό την $(\gamma): (x^2 + y^2 = x, z = 1)$

Λύση:

Οι ευθείες που διέρχονται από το $K(0,0,0)$ περιγράφονται από την εξίσωση:

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \left\{ \frac{x-0}{\alpha} = \frac{y-0}{\beta} = \frac{z-0}{\gamma} \right\}$$

Θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των α, β, γ οι $E_{\alpha\beta\gamma}$ τέμνουν την (γ) .

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \\ y = \frac{\beta}{\alpha} x \\ z = \frac{\gamma}{\alpha} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \\ x = \frac{\alpha}{\gamma} \\ y = \frac{\beta}{\gamma} \end{cases}$$

Με απαλοιφή των $x, y, z \Rightarrow$

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha}{\gamma} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha \cdot \gamma \quad (*)$$

Από την εξίσωση (Εαβγ) έχουμε :

$$\begin{cases} x = t \cdot \alpha \\ y = t \cdot \beta \\ z = t \cdot \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{t} \\ \beta = \frac{y}{t} \\ \gamma = \frac{z}{t} \end{cases} \quad (**)$$

$$\begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix} \Rightarrow x^2 + y^2 = x \cdot z, \text{ αυτή είναι η επιφάνεια που ζητάμε.}$$